Učni list

Naloge iz modeliranja

1. **Spreminjanje prostornine**

Francoski fizik Jacques Charles je odkril, da vsi plini pri ohlajanju spreminjajo prostornino pri konstantnem tlaku na enak način. V spodnji preglednici so prikazani podatki o spreminjanju prostornine enega od plinov v odvisnosti od temperature pri ohlajanju.

Temperatura[°C]	50	- 30	- 110	- 135	- 220
Prostornina	120	90	60	50	20

a) Kaj se dogaja s plinom pri ohlajanju?

b) Zgornje podatke nariši v koordinatni sistem in poišči najustreznejšo prilagoditveno krivuljo. Poišči njen funkcijski predpis.

c) Prilagoditveni funkciji določi presečišče z vodoravno osjo. Kaj predstavlja to presečišče?

d) Iz grafa oceni prostornino pri -60 °C.

e) Izračunaj prostornino plina pri 0 °C.

f) Kaj je smiselno definicijsko območje te funkcije?

g) Kakšno je v splošnem definicijsko območje funkcije, ki prikazuje ohlajanje?

h) Kaj je smiselna zaloga vrednosti te funkcije?

i) Poglej v učbenik fizike in primerjaj svoje ugotovitve z ugotovitvami stroke.

2. **Raztezanje traku**

Na elastični trak smo obešali različno težke uteži in pri tem merili dolžino traku. V spodnji preglednici so zapisani rezultati meritev.

Masa uteži [kg]	0,2	0,3	0,5	1,0	1,2
Dolžina traku [cm]	15	16	18	23	25

a) V koordinatnem sistemu prikaži odvisnost dolžine traku od mase uteži. Nariši najustreznejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis.

b) Iz grafa odčitaj dolžino traku, če nanjo obesimo 0,8 kg.

c) Koliko je dolg neobremenjeni trak?

d) Izračunaj dolžino traku, če nanj obesimo 2 kg utež?

e) Kateri od zgornjih treh odgovorov je gotovo nepravilen. Zakaj?

3. Temperatura vode v jezeru

Temperatura vode v jezeru se z globino spreminja. Spodnja preglednica predstavlja povprečno temperaturo vode glede na globino v 20 m globokem jezeru.

Globina [m]	0	4	8	12	16	20
Temperatura [°C]	15	14	13	6	5	4

a) Nariši graf, ki prikazuje odvisnost temperature jezera od njegove globine.

b) Kako bi ocenil temperaturo jezera na globini 20 m, če bi imel samo naslednje podatke:

Globina [m]	0	4	8
Temperatura [°C]	15	8	13

c) Med katerima dvema globinama je po tvojem mnenju najteže oceniti temperaturo jezera? Zakaj?

d) Poišči prilagoditveni funkciji na dveh ločenih intervalih.

e) Ali je smiselno ocenjevati temperaturo na globini, večji od 20 m? Razloži.

4. Avtomobilske dirke

Indianapolis 500 je tradicionalna vsakoletna ameriška dirka, njeni začetki pa segajo v leto 1911. Med sezonama 1950 in 1960 je štela tudi za prvenstvo Formule 1. V spodnji preglednici je zapisana povprečna hitrost zmagovalca v miljah na uro za nekatera leta.

Leto	Hitrost zmagovalca [m/h]
1920	89
1930	100
1940	114
1950	124
1960	139
1970	156
1980	143
1990	186
2000	154

a) Kako se je hitrost zmagovalca v letih spreminjala? Katero leto je povprečna hitrost zmagovalca najbolj presenetljiva?

b) V koordinatnem sistemu predstavi podatke za leta od 1920 do 1960 iz zgornje preglednice. Poišči ustrezno prilagoditveno funkcijo.

c) Na osnovi modela iz b) sklepaj, kolikšno povprečno hitrost so gledalci pričakovali v letih 1970, 1980 in 1990. Kako se pričakovanje ujema z dejansko povprečno hitrostjo zmagovalca?

d) Iz grafa oceni največjo povprečno hitrost prvo leto prireditve 1911. Na spletni strani http://sl.wikipedia.org/wiki/Indianapolis_500 (24. 2. 2010) poišči pravi podatek in ju primerjaj.

e) Ali lahko iz zgornjega grafa napoveš povprečno hitrost zmagovalca prihodnje leto in leta 2050?

f) Naštej nekaj dejavnikov, ki lahko vplivajo na dosežene povprečne hitrosti.

5. Gorenje sveče in merjenje časa

Preden so iznašli mehanske ure za merjenje časa, so uporabljali sveče. Naslednja empirična funkcijska zveza povezuje višino sveče s časom:

$h(t) = 10 – 2t$,

kjer je h višina sveče v cm in t čas gorenja sveče v urah.

a) Kolikšna je višina sveče, preden jo prižgejo?

b) Kaj predstavlja v funkcijskem predpisu število 10?

c) Za koliko se sveča zniža vsako uro?

d) Kaj predstavlja konstanta 2 v funkcijskem predpisu?

e) Koliko časa sveča gori?

f) Koliko sveč bi potrebovali za merjenje časa v tednu dni?

g) Kaj so predpostavke vseh zgornjih ocen?

6. Žeblji

Spodnja tabela prikazuje, kako se premer glave žeblja spreminja z njegovo dolžino.

	Premer [mm]			Premer [mm]
20	1.2		70	3.1
25	1.4		80	3.1
30	1.6		80	3.4
35	1.6		90	3.4
35	1.8		100	3.8
40	2.0		90	3.8
45	2.2		110	4.2
50	2.2		120	4.2
55	2.2		130	4.6
55	2.5		140	5.5
60	2.5		160	5.5
60	2.8		180	6.0
65	2.8		210	7.0
65	3.1			

a) V koordinatnem sistemu prikaži odvisnost premera glave žeblja od njegove dolžine
b) Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis.
c) V kakšni odvisnosti je dolžina žeblja od premera glave žeblja. Zapiši funkcijski predpis.
d) Ali lahko določiš premere žebljev manjkajočih dolžin?
e) Ali obstajajo daljši (krajši) žeblji, ki jih dobiš s to modelsko funkcijo?

7. Vroča čokolada

Vroča čokolada se po pripravi začne ohlajati. Kako je njena temperatura odvisna od časa po pripravi, prikazuje spodnja preglednica.

Čas[minuta]	10	20	40	70	80
Temperatura[°C]	95	77	52	28	23

a) Kaj prikazuje tabela?
b) Zgornje podatke nariši v koordinatni sistem in poišči najustreznejšo prilagoditveno krivuljo. Poišči njen funkcijski predpis.
c) Iz grafa oceni temperaturo čokolade po 50 minutah ohlajanja.
d) Preveri rezultat iz točke c) z uporabo funkcijskega predpisa.
e) S pomočjo prilagoditvene funkcije določi temperaturo čokolade po 90 minutah ohlajanja.
f) Ali se bo čokolada po preteku 80 minut še ohlajala?
g) Kaj je smiselno definicijsko območje te funkcije?
h) Kaj je smiselna zaloga vrednosti te funkcije?
i) Ali lahko na osnovi teh meritev sklepamo, da se vsaka vroča čokolada ohlaja na način, kot ga predvideva naš model? Svoje stališče razloži.
j) Od česa je odvisna natančnost ocen o temperaturi čokolade na časovnih intervalih, na katerih meritev ni bila izpeljana?

8. Število prebivalcev na Zemlji

Število prebivalcev na planetu Zemlja se je v zadnjih nekaj stoletjih zelo povečalo. V spodnji preglednici imamo predstavljeno število prebivalcev v milijardah.

Leto	1600	1700	1800	1900	1950	1975	2000
Število prebivalcev [milijarda]	0,5	0,6	0,9	1,6	2,5	3,9	6,3

a) V koordinatnem sistemu prikaži, kako s časom narašča število prebivalcev na Zemlji. Poišči najprimernejšo prilagoditveno funkcijo, ki modelira zgornje podatke.
b) Kaj se dogaja s strmino krivulje?
c) Iz grafa oceni število prebivalcev na Zemlji leta 1500.
d) Iz grafa oceni število prebivalcev na Zemlji leta 2025.
e) Oblikuj odgovora na vprašanji b) in c) tako, da vključiš privzetke.
f) Katero oceno je laže narediti in zakaj?

9. Velikosti žebljev

V spodnji tabeli je prikazana odvisnost dolžine žeblja v dveh različnih dolžinskih enotah od velikosti žeblja.

Velikost žebljev	Dolžina v inčah	Dolžina v mm		Velikost žebljev	Dolžina v inčah	Dolžina v mm
2d	1	25		12d	3¼	83
3d	1¼	32		16d	3½	89
4d	1½	38		20d	4	102
6d	2	51		30d	4½	115
7d	2¼	57		40d	5	127
8d	2½	65		50d	5½	140
9d	2¾	70		60d	6	152
10d	3	76				

a) V koordinatnem sistemu prikaži, kako je dolžina v milimetrih odvisna od dolžine v inčih. Poišči zvezo med obema dolžinskima enotama.

b) V koordinatnem sistemu nariši odvisnost velikosti žeblja od njegove dolžine v milimetrih. Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis.

c) V koordinatnem sistemu nariši odvisnost dolžine žeblja v milimetrih od njegove velikosti. Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis.

d) Izračunaj kompozitum dobljenih funkcij pod b) in c). Kaj ugotoviš?

10.Razbarvanje raztopine

Pri poizkusu smo v raztopino rdeče barve vlili belilo in merili čas, v katerem se je raztopina razbarvala. Poizkus smo ponovili pri različnih temperaturah, temperaturi raztopine in belila sta bili vedno enaki. Vsakič smo izmerili čas, potreben za razbarvanje.

Eksperimentalni rezultati so podani v preglednici.

Temperatura T[°C]	Čas t[s]	ln (t)
3,5	690	
7,0	474	
12,0	292	
22,5	121	
27,0	69	
30,0	47	
34,5	35	

a) Kako je čas razbarvanja odvisen od temperature, pri kateri smo začeli poskus?

b) Nariši koordinatni sistem in prikaži odvisnost časa *t* od temperature *T.* Nariši funkcijo, ki se najbolje prilega izmerjenim podatkom.

c) Računsko poišči predpis za prilagoditveno eksponentno funkcijo v obliki $t(T) = a \cdot e^{kt}$. Koliko točk potrebuješ?

d) Izmerjene podatke predstavi v koordinatnem sistemu z Excelom (Geogebra, grafično računalo …) in poišči prilagoditveno funkcijo. Funkcijski predpis primerjaj s funkcijskim predpisom, ki si ga izračunal brez IKT. Poizkusi še s katero drugo prilagoditveno funkcijo.

e) Izračunaj čas razbarvanja pri temperaturi 40 °C z obema funkcijskima predpisoma. Primerjaj rezultata.

f) V preglednici dopolni stolpec za *ln(t).* Z uporabo tehnologije nariši graf *ln(t)* v odvisnosti od temperature *T* in najprimernejšo prilagoditveno funkcijo. Poišči njen funkcijski predpis. S primerno osnovo logaritmiraj funkcijski predpis iz točke d) in rezultat primerjaj s funkcijskim predpisom iz točke f). Komentiraj dobljeni rezultat.

g) Kako uporaben se ti zdi eksponentni model?

11. Cena smučarske vozovnice

Na smučišču prodajo na dan povprečno 1000 smučarskih vozovnic po 25 €. Vsaka podražitev smučarske vozovnice posledično vpliva na manjši obisk smučišča. Raziskave so pokazale, da se lahko število smučarjev zmanjša na dva različna načina:

a) zmanjšanje števila smučarjev je premo sorazmerno s podražitvijo, kjer je koeficient k premega sorazmerja enak k = 30. Podražitev za x € pomeni za $30x$ manj prodanih vozovnic,

b) zmanjšanje števila smučarjev je p % za vsak evro podražitve, kjer je $p = 3$.

Vprašanje: Za koliko se upravljavcu smučišča splača podražiti ceno vozovnice, da bodo kljub manjšemu številu prodanih vozovnic imel večji oziroma enak dohodek?

Podražitev vozovnice označimo s spremenljivko x. Raziščimo dohodek na smučišču glede na prvo mogočo napoved.

a) Kolikšna je nova cena vozovnice?
b) Za koliko se zmanjša število smučarjev? Koliko je prodanih vozovnic?
c) Kolikšen je novi dnevni dohodek na smučišču?
d) Kolikšna je razlika med novim in starim dohodkom?
e) Pri katerih vrednostih spremenljivke x je dnevni dohodek večji kot pred podražitvijo? Pomagaj si z matematičnim programom za risanje funkcij.
f) Pri kateri podražitvi je dohodek največji?
g) *Nalogo lahko rešiš z N prodanimi vozovnicami na dan in poljubnim koeficientom k podražitve.

Raziščimo dohodek na smučišču glede na drugo mogočo napoved.

a) Kolikšna je nova cena vozovnice?
b) Kolikšno je novo število smučarjev, če se podraži vozovnica za 1 €?
c) Kolikšno je novo število smučarjev, če se podraži vozovnica za 2 €, 3 € … x €?
d) Kolikšen je novi dnevni dohodek na smučišču?
e) Kolikšna je razlika med novim in starim dohodkom?
f) Pri katerih vrednostih spremenljivke x je dnevni dohodek večji kot pred podražitvijo? Pomagaj si z matematičnim programom za risanje funkcij.
g) Pri kateri podražitvi je dohodek največji?

Katera napoved je za upravljavca smučišča boljša? Kateri model je bolj smiseln? Utemelji?

Literatura: Dilwyn Edwards and Michael Hamson, Mathematical Modelling Skills, MACMILLAN PRESS LTD.

12. Promet

S kolikšno hitrostjo naj vozimo, da bo čim manj zastojev?

Pot ustavljanja je enaka vsoti reakcijske poti, ki jo naredimo, preden se odzovemo na oviro, in poti, ki jo naredimo med zaviranjem – zavorne poti. Reakcijska pot je pot, ki jo vozilo prevozi od trenutka, ko voznik zazna oviro pred vozilom, do trenutka, ko začne zavirati, torej pot, ki jo prevozi v reakcijskem času. Predvideva se, da je reakcijski čas povprečnega voznika približno sekunda. Po eni sekundi začne voznik zavirati, zavorna pot pa je odvisna od hitrosti, razmer na cesti in še česa drugega.

V spodnji preglednici so zbrani podatki o poti ustavljanja pri različnih hitrostih na suhi cesti.

Hitrost *v*[km/h]	Reakcijska pot (m)	Zavorna pot (m)	Hitrost *v*[m/s]	Pot ustavljanja *s*[m]
30	8	5		
50	14	13		
70	19	26		
90	25	42		
110	31	63		
130	36	90		

Predpostavimo, da vozijo avtomobili v medsebojni razdalji, ki je enaka poti ustavljanja pri njihovi hitrosti.

Vprašanje: Kako hitro naj vozijo avtomobili, da gre mimo opazovališča prometa v eni uri največ avtomobilov?

a) Dopolni zgornjo preglednico: hitrost pretvori v *m/s* in izračunaj pot ustavljanja.
b) Razišči, kako je pri danih podatkih celotna pot ustavljanja odvisna od hitrosti, s katero vozimo ($s = s(v)$). Nariši graf poti s[m] ustavljanja v odvisnosti od hitrosti *v*[m/s]. Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis (pri tem uporabi grafično računalo ali ustrezen matematični program).
c) Predpostavimo, da je v povprečju avto dolg 4 m. Rekli smo, da avtomobili vozijo v medsebojni razdalji, ki je enaka poti ustavljanja. Koliko je pri dani hitrosti *v* razdalja med začetkom prvega avtomobila in začetkom drugega?
d) Kolikšen je časovni interval med prihodom avtomobila do opazovališča do prihoda drugega?
e) Koliko avtomobilov pelje mimo opazovališča v eni uri?
f) Pri kateri hitrosti je število avtomobilov največje? Koliko avtomobilov je peljalo mimo opazovališča?

13. Čakalni čas

Čas čakanja vlaka pred zapornicami v odvisnosti od hitrosti vlaka prikazuje spodnja tabela.

Hitrost vlaka [km/h]	16,1	32,2	48,3	64,4	80,5	96,6
Čas čakanja[min]	12	6	4	3	2,4	2

a) Kako se spreminja čas čakanja pred zapornicami v odvisnosti od hitrosti vlaka? V koordinatnem sistemu prikaži čas čakanja pred zapornicami v odvisnosti od hitrosti vlaka.

b) Nariši najprimernejšo prilagoditveno funkcijo in poišči njen funkcijski predpis. Kako imenujemo dobljeno krivuljo.

14. Dolžina dneva

Dolžina dneva se v Ljubljani med letom spreminja. Spodnja tabela prikazuje tipične podatke za Ljubljano za leto 2010. Podatki so povzeti s spletne strani http://vesolje.net/koledar/koledar.php (22. 1. 2010).

Dan v letu 2010	**Dolžina dneva v urah**
5. januar	8:48
21. januar	9:16
5. februar	9:55
21. februar	10:43
5. marec	11:22
21. marec	12:13
5. april	13:02
21. april	13:52
5. maj	14:34
21. maj	15:12
5. junij	14:36
21. junij	15:46
5. julij	15:38
21. julij	15:12
5. avgust	14:37
21. avgust	13:51
5. september	13:06
1. september	12:14
5. oktober	11:29

21. oktober	10:38
5. november	9:54
21. november	9:13
5. december	8:49
21. december	8:39
5. januar 2011	8:48

a) Kaj se dogaja z dolžino dneva? Kakšno lastnost ima?

b) V koordinatnem sistemu prikaži podatke. Na abscisni osi naj bo čas od prvega podatka 5. januar 2010 (npr. 21. 1. 2010 je pri 0,5 meseca, 5. 2. 2010 je pri 1 mesecu …)

c) Z besedami in funkcijskim predpisom opiši odvisnost med spremenljivkama.

d) Oceni dolžino dneva za svoj rojstni dan.

e) Napovej dolžino dneva 200 dni po 1. septembru?

f) Določi zalogo vrednosti dobljene funkcije.

g) Kdaj funkcija zavzame maksimalno in kdaj minimalno vrednost?

h) Kako se dolžina dneva spreminja s časom na ekvatorju? Odvisnost prikaži v koordinatnem sistemu.