Rešitve nalog

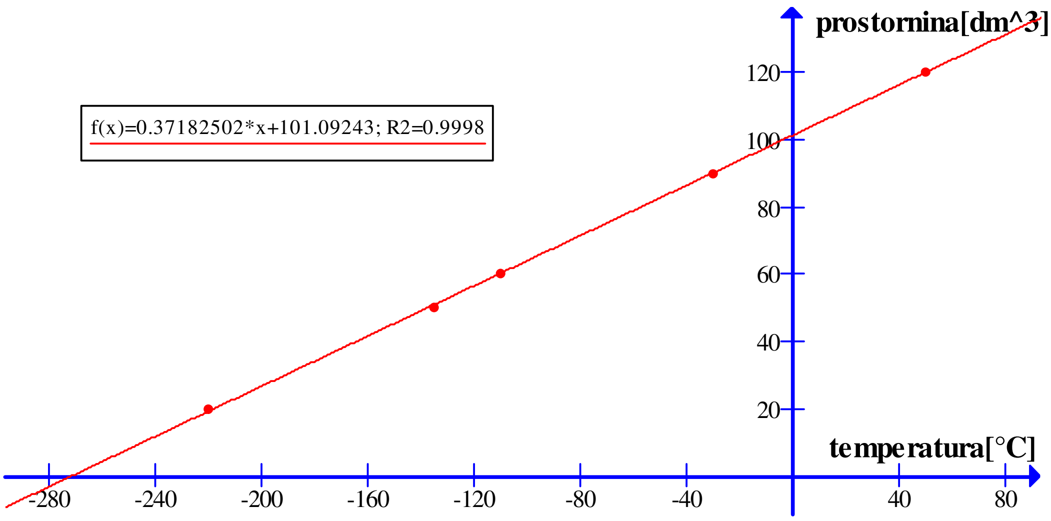
Naloge iz modeliranja

1. Spreminjanje prostornine

a) Plin se pri ohlajanju krči oziroma pri segrevanju razteza.

b) Najustreznejša prilagoditvena funkcija je linearna. S programom Graph dobimo graf prilagoditvene funkcije in funkcijski predpis, ki ga razberemo s priložene slike (z dvoklikom odpremo datoteko).

c)



d) Program Graph prikaže presečišče približno pri –271,9 °C. (Med meniji izberemo *Računaj,* potem *Ovrednoti* in *Lepi na os-x*.) Abscisa presečišča z abscisno osjo predstavlja absolutno ničlo (približno –273 °C http://sl.wikipedia.org/wiki/Absolutna_ničla), ordinata nič pa pomeni prostornino 0 (stanje, ko plin preide v tekoče stanje; plinska enačba ne velja več).

e) Prostornina plina pri –60° C je 79 dm^3.

f) Prostornina plina pri 0° C je 101 dm^3

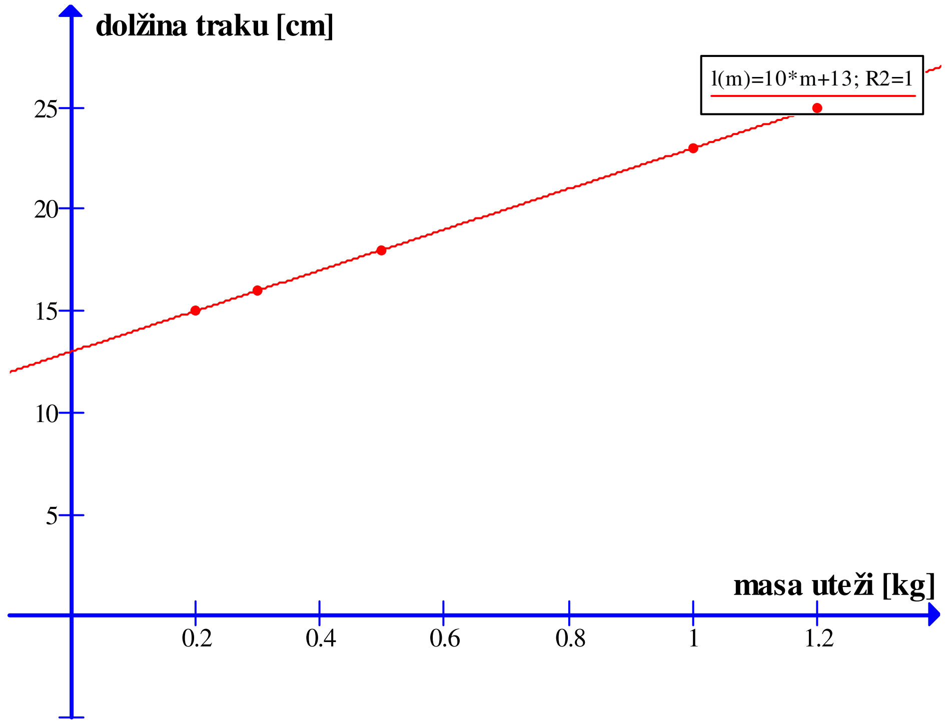
g) Smiselno definicijsko območje je T > –273° C.

h) Definicijsko območje linearne funkcije je ***R.***

i) Smiselna zaloga vrednosti so pozitivna oziroma nenegativna števila do temperature, ki jo lahko razvijemo za segrevanje.

2. **Raztezanje elastičnega traku**

a)



Funkcijski predpis: $l(m) = 10m + 13$

b) Dolžina traku z grafa, če nanj obesimo 0,8 kg je 21 cm.

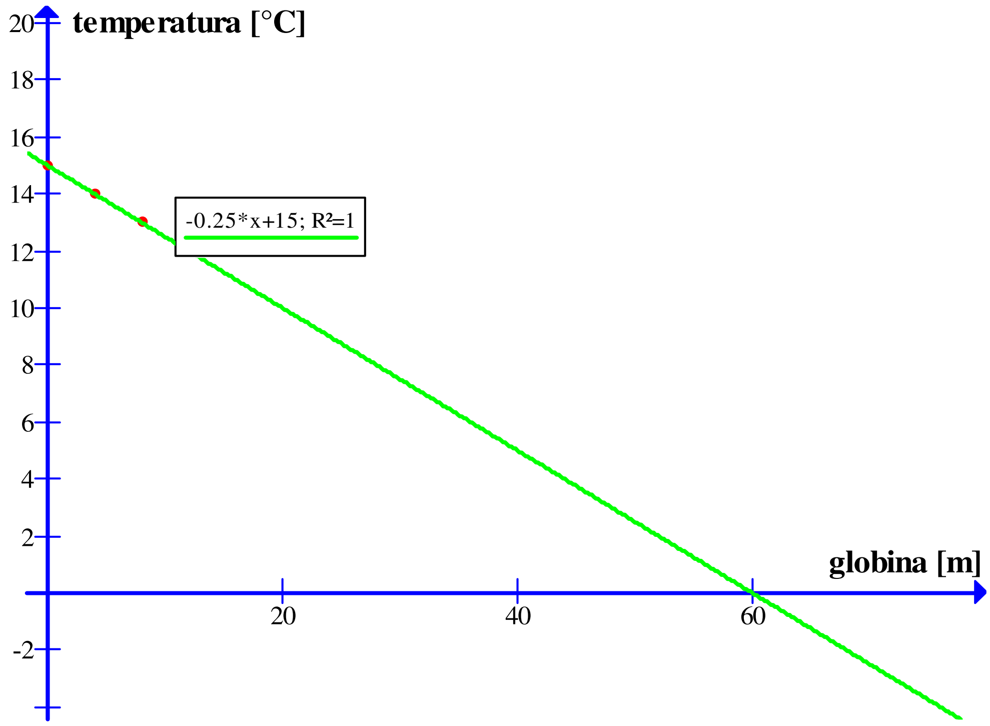
c) Neobremenjeni trak je dolg 13 cm.

d) Dolžina traku, če nanj obesimo 2 kg utež je 33 cm.

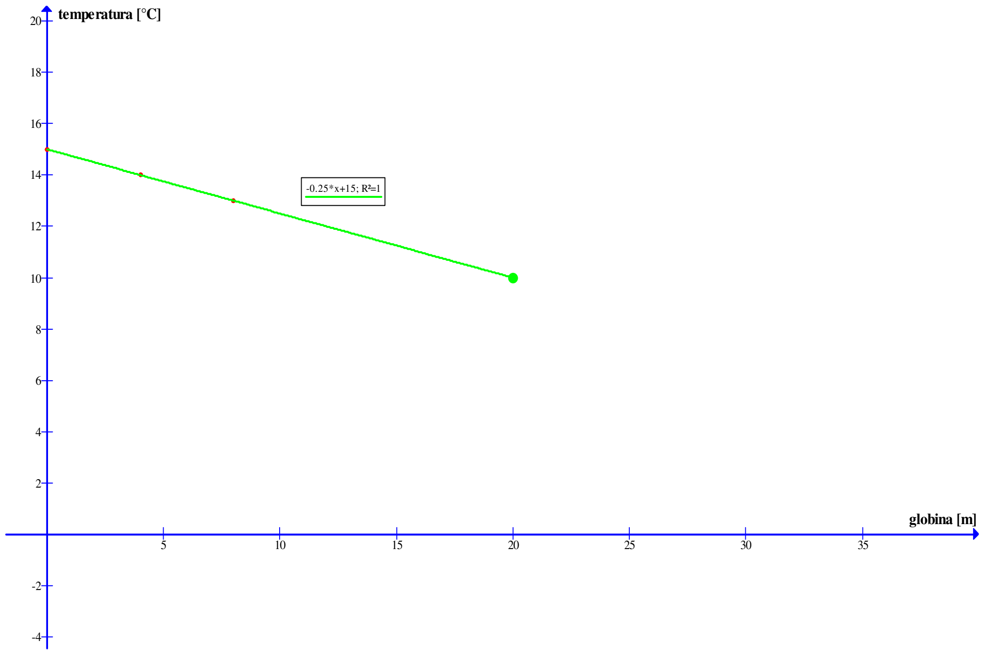
e) Zadnji odgovor je gotovo nepravilen, ker je trak skoraj trikrat daljši od prvotne dolžine. Pri tej obremenitvi bi se, ali pretrgal, ali pa se ne razteza več po istem pravilu.

3. Temperatura vode v jezeru

a)

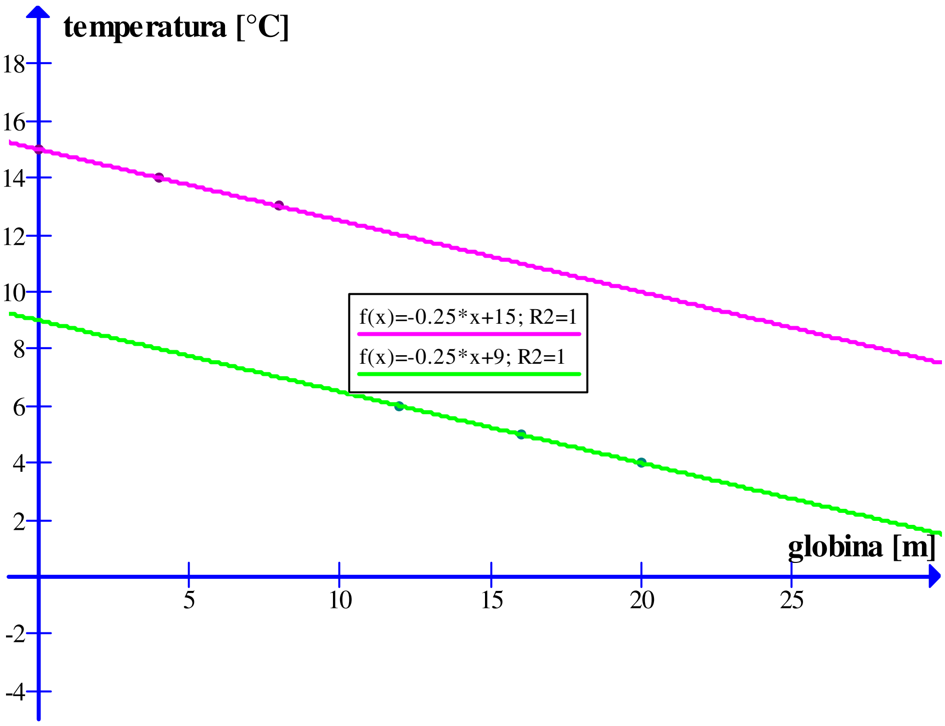


b)

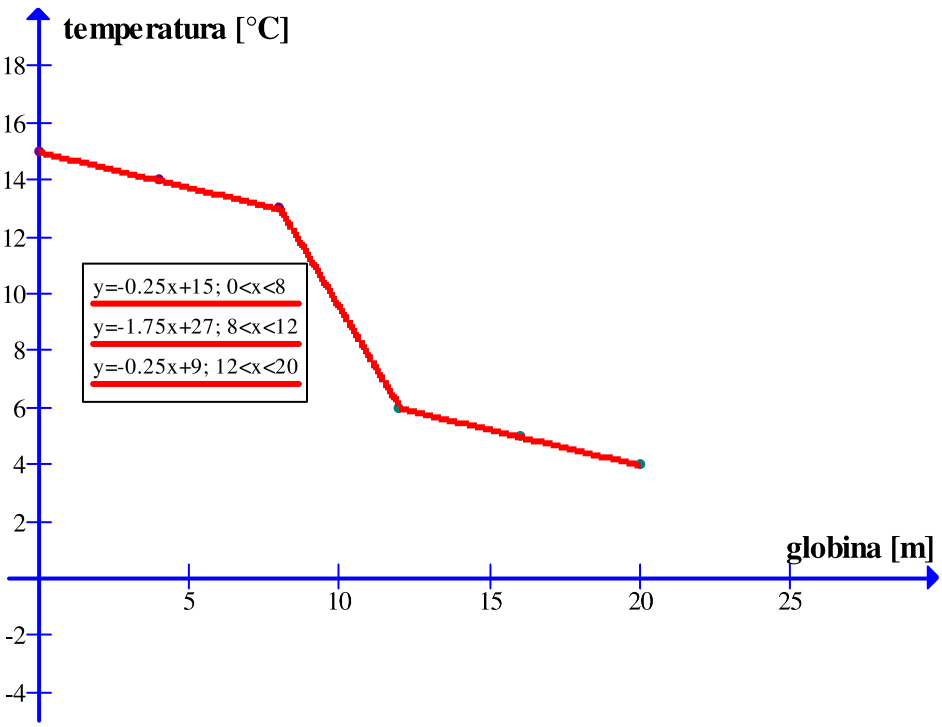


Če izberemo za prilagoditveno krivuljo premico, potem lahko ocenimo, da bo temperatura vode v globini 20 m dosegla 10 °C.

c) Med 8 m in 12 m.



d) Prilagoditvena krivulja po intervalih:



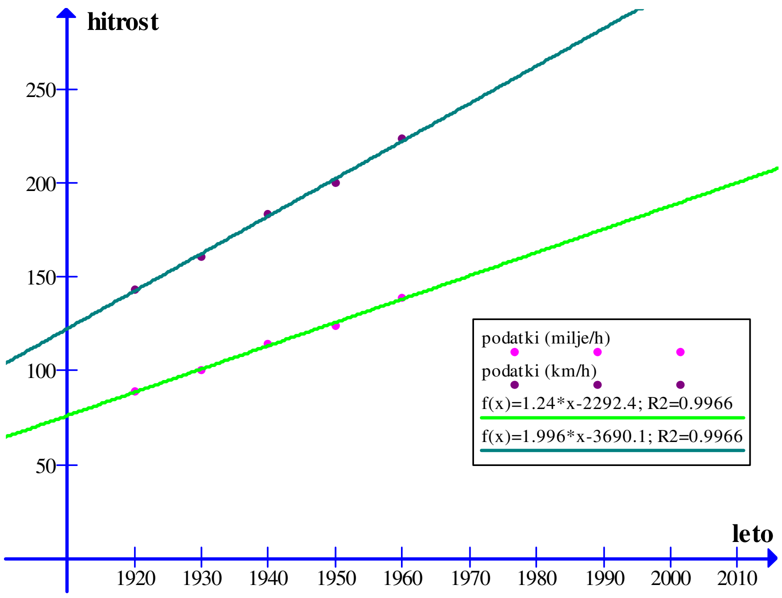
e) Ne, ker je globina jezera 20 m.

4. Avtomobilske dirke

Leto	Hitrost zmagovalca [miljah/h]	Hitrost zmagovalca [km/h]
1920	89	143,2
1930	100	160,9
1940	114	183,4
1950	124	199,5
1960	139	223,7
1970	156	251,0
1980	143	230,1
1990	186	299,3
2000	154	247,8

a) Hitrost zmagovalca se je povečevala. Povprečne hitrosti niso presenetljive, saj so se v preteklosti motorji hitro razvijali, kasneje so višanja hitrosti ustavili z različnimi omejitvami oziroma spremembami pravil tekmovanja. Zelo verjetno je do omejitev prišlo po letu 1970 in 1990, saj se naslednje leto vsakič povprečna hitrost zmanjša.

b)



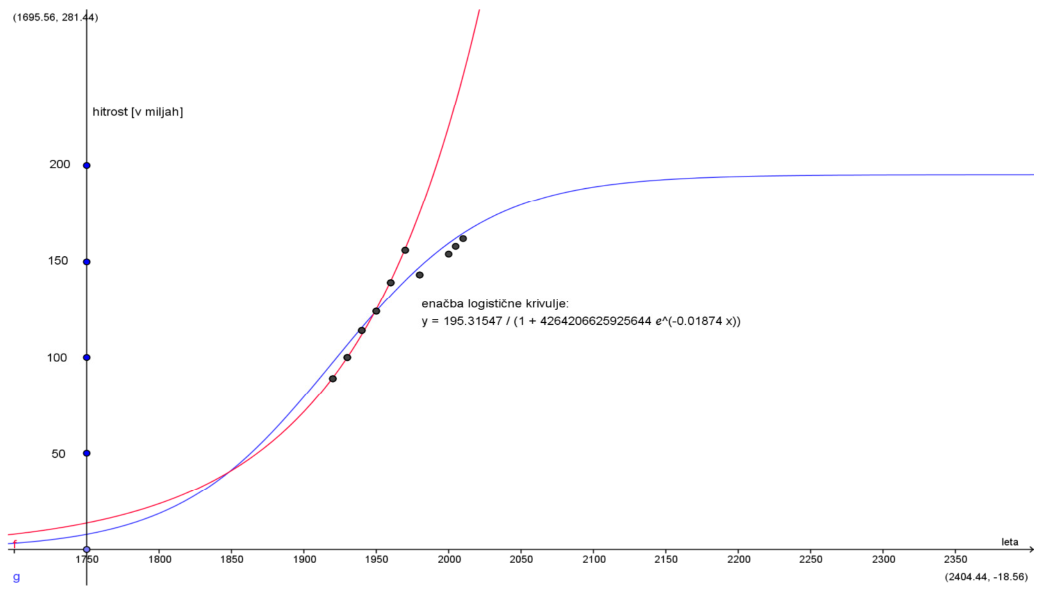
Zanimivost: Med funkcijama ni vzporedni premik, ampak središčni razteg.

c) Iz modela b) lahko ocenimo:
povprečno hitrost zmagovalca leta 1970: 150,4 milje/h oz. 242 km/h,
povprečno hitrost zmagovalca leta 1980: 162,8 milje/h oz. 262 km/h,
povprečno hitrost zmagovalca leta 1990: 175,2 milje/h oz. 281,9 km/h.
Največje odstopanje med dejansko povprečno hitrostjo in ocenjeno hitrostjo je v letu 1980 (verjetno zaradi dodatnih omejitev, ki so jih uvedli).

d) Po modelu b) bi bila povprečna hitrost zmagovalca v letu 1911 77,2 milje/h oz. 124,3 km/h. Prava povprečna hitrost (vir: http://sl.wikipedia.org/wiki/Indianapolis_500 (2.8.2010)) je bila 74,6 milje/h oz. 120 km/h.

e) Po modelu b) bi za letošnjo leto ocenili povprečno hitrost 200 milj/h oz. 321,9 km/h, kar je seveda veliko preveč. Dejanska hitrost je bila (vir: http://sl.wikipedia.org/wiki/Indianapolis_500 (2.8.2010)) 161,6 milj/h oz. 260 km/h. Torej ta model po letu 2000 ne velja.

Geogebra – logistična krivulja:



Rdeča logistična krivulja:

- podatki do leta 1970; predpis f(x) = $\frac{-5849}{1-9{,}9*10^{10}*e^{-0{,}011x}}$

Tudi ta ni sprejemljiva, saj hitrosti naraščajo in bi leta 2000 bila povprečna hitrost 219 milj/h (352 km/h), kar je seveda nemogoče.

Modra logistična krivulja:

- podatki do leta 2010 (brez leta 1990)

Leto	Hitrost v miljah/h
1920	89
1930	100
1940	114
1950	124
1960	139
1970	156
1980	143
2000	154
2005	158
2010	162

Vir: http://sl.wikipedia.org/wiki/Indianapolis_500 (2.8.2010)

- predpis f(x) = $\frac{195,3}{1+4,26*10^{15}*e^{-0,019x}}$

  V tem primeru bi bila hitrost:
  leta 2000 159 milj/h (255,8 km/h),
  leta 2010 164 milj/h (263,9 km/h),
  leta 2050 179,5 milj/h (288,8 km/h)
  Največja hitrost, ki bi jo dosegli, bi bila v tem primeru 195,3 milje/h (314 km/h).

f) Dež (primer leta 1975 in 1976, prevozili so krajšo razdaljo in tudi povprečna hitrost je bila glede na leta prej in pozneje manjša, enako velja za leto 2004)

Podatki:

Leto	prevoženih milj	hitrost
1972	500	162.692
1973	332.5 (dež)	159.063
1974	500	158.589
1975	435 (dež)	149.213
1976	255 (dež)	148.725
1977	500	161.331
2003	500	156.291
2004	450 (dež)	138.518
2005	500	157.603

5. Gorenje sveče in merjenje časa

a) Višina sveče, preden jo prižgejo, je 10 cm.

b) Začetno vrednost.

c) Vsako uro se sveča zniža za 2 cm.

d) Smerni koeficient, ki je merjen v cm/h.

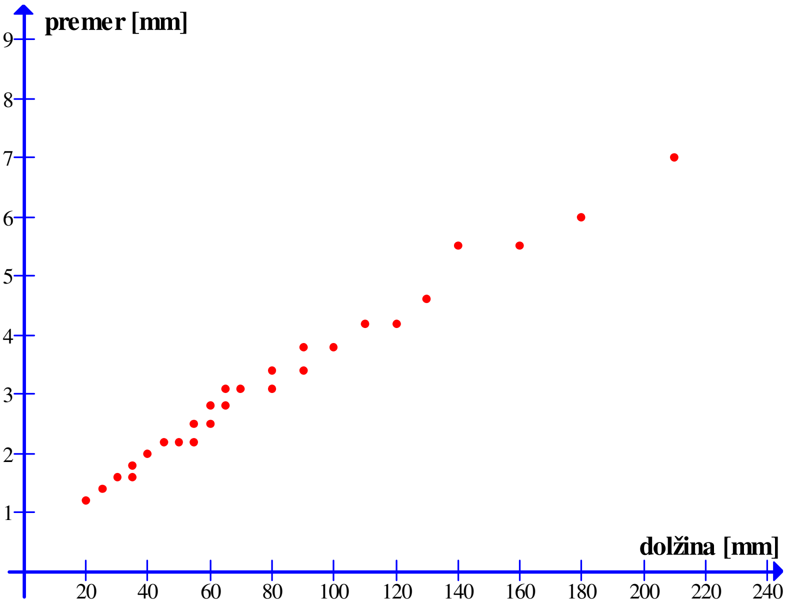
e) 5 ur (verjetno malo manj, saj nekaj sveče ostane, ko ugasne).

f) 34 sveč.

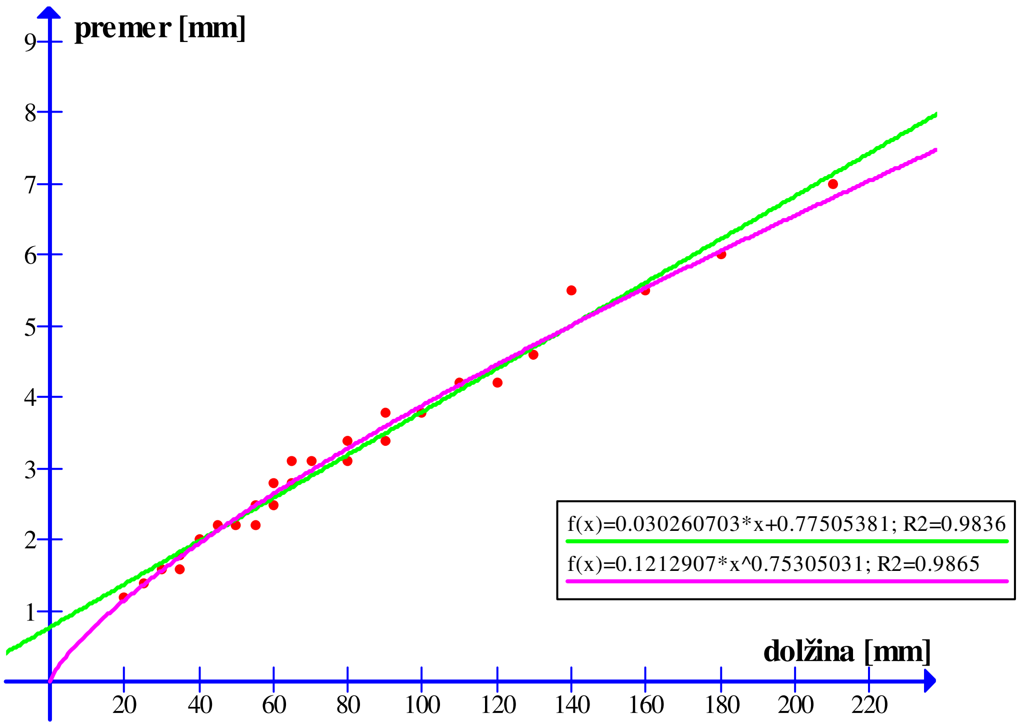
g) Sveča vedno zgori do konca. Sveča vmes ne ugasne. Ni raziskana odvisnost od debeline in oblike sveče. Privzamemo, da je kakovost voska sveče enaka, prav tako kakovost in dimenzija stenja.

6. Žeblji

a) Dobimo razsevni diagram, ki kaže linearno odvisnost.



b) Na videz najprimernejši prilagoditveni funkciji sta linearna in potenčna:
$d(l)=0.0303*l+0.7751$ in $d(l)=0.1213*l$^0.7531



c) Približna odvisnost je odsekoma linearna, odsekoma potenčna funkcija.

d) Premeri žebljev manjkajočih dolžin:

Dolžina l [mm]	150	170	190	200
Premer d [mm]	5,3	5,9	6,3	6,8

Za oceno so upoštevani primerjalno očiščeni podatki in pripadajoče prilagoditvene funkcije.

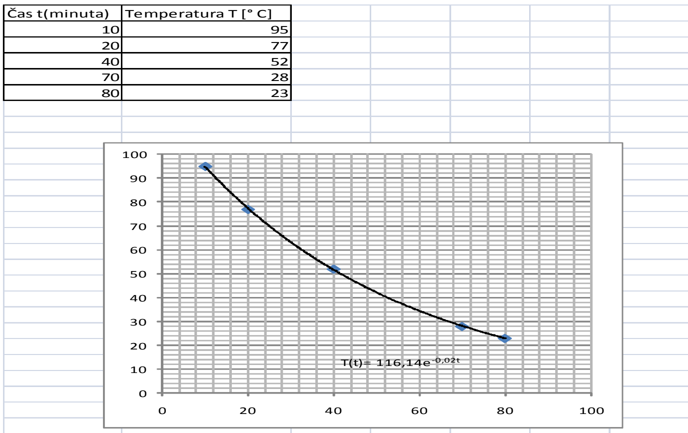
e) Po prilagoditveni funkciji obstajajo tudi krajši in daljši žeblji.
Krajših žebljev verjetno ni, daljši pa obstajajo. (vir: http://www.tehmax.si/main/index.php?option=com_content&task=view&id=126&Itemid=247).

Dolžina l [mm]	220	250	280
Premer d [mm]	7,5	7,5	8,0
Premer d [mm] – po potenčni prilagoditveni krivulji	7,0	7,8	8,4

7. Vroča čokolada

a) Tabela temperature čokolade v odvisnosti od časa.

b) S programom Excel:

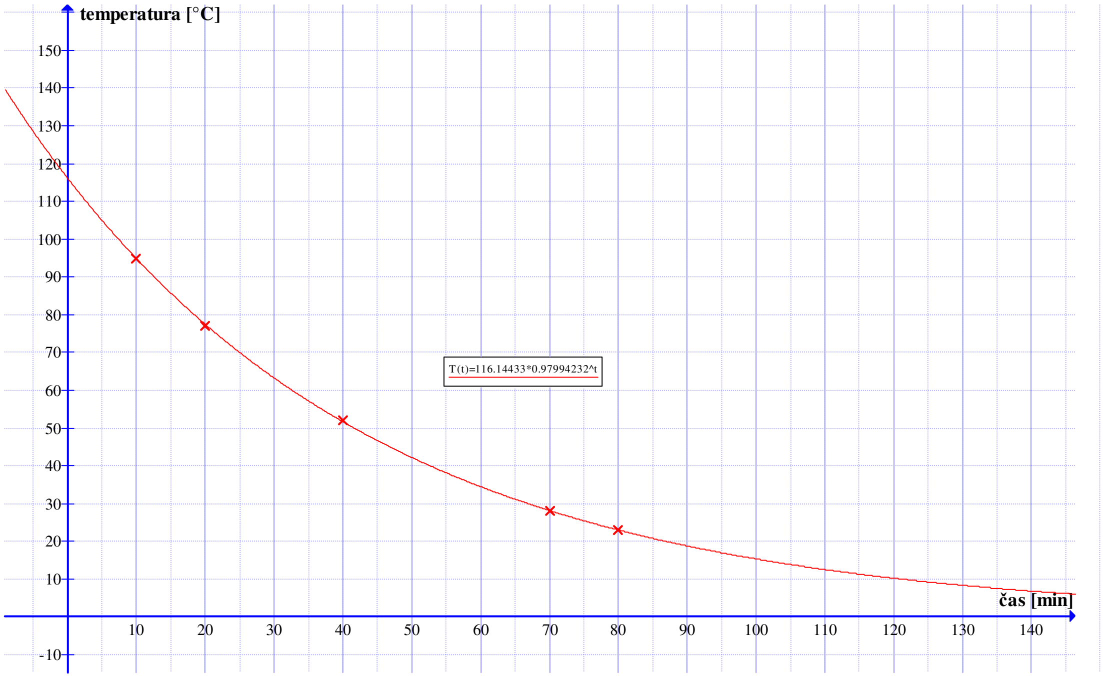


Čas t(minuta)	Temperatura T [° C]
10	95
20	77
40	52
70	28
80	23

(dokument odpre dvoklik)

Funkcijski predpis je $T(t) = 116{,}14 \cdot e^{-0{,}02t}$

S programom Graph: na naslednji strani



Najustreznejša prilagoditvena krivulja je eksponentna.
Funkcijski predpis je $T(t) = 116{,}14 \cdot 0{,}98^{t}$

c) Temperatura čokolade po 50 minutah ohlajanja ocenjena z grafa je 42,17°C.

d) Rezultat iz točke c) z uporabo funkcijskega predpisa:
$\mathrm{T}(50) = 116{,}14 \cdot 0{,}98^{50} = 42{,}24°\mathrm{C}$

e) Iz grafa preberemo, da je $\mathrm{T}(90) = 18{,}75°\mathrm{C}$, vendar se moramo vprašati, v kakšnih okoliščinah je to mogoče.

f) $\mathrm{T}(80) = 23°\mathrm{C}$. To je povprečna sobna temperatura. Čokolada se v takem okolju več ne bo ohlajala. V okolju z nižjo temperaturo pa lahko.

g) Smiselno definicijsko območje te funkcije: $\mathrm{D_T} = [0, 90\ ]$, če privzamemo, da je o definicijskem območju spremenljivke t odloča temperatura okolja T.

h) Smiselna zaloga vrednosti te funkcije: $\mathrm{Z_T} = [23\ °\mathrm{C}, 120\ °\mathrm{C}]$

i) Ne. Ohlajanje je odvisno od zunanjih dejavnikov.

j) Natančnost ocen je odvisna od poteka krivulje, ki se podatkom najbolj prilega, od števila meritev, časovnega intervala merjenja in poznavanja pogojev v okolju.

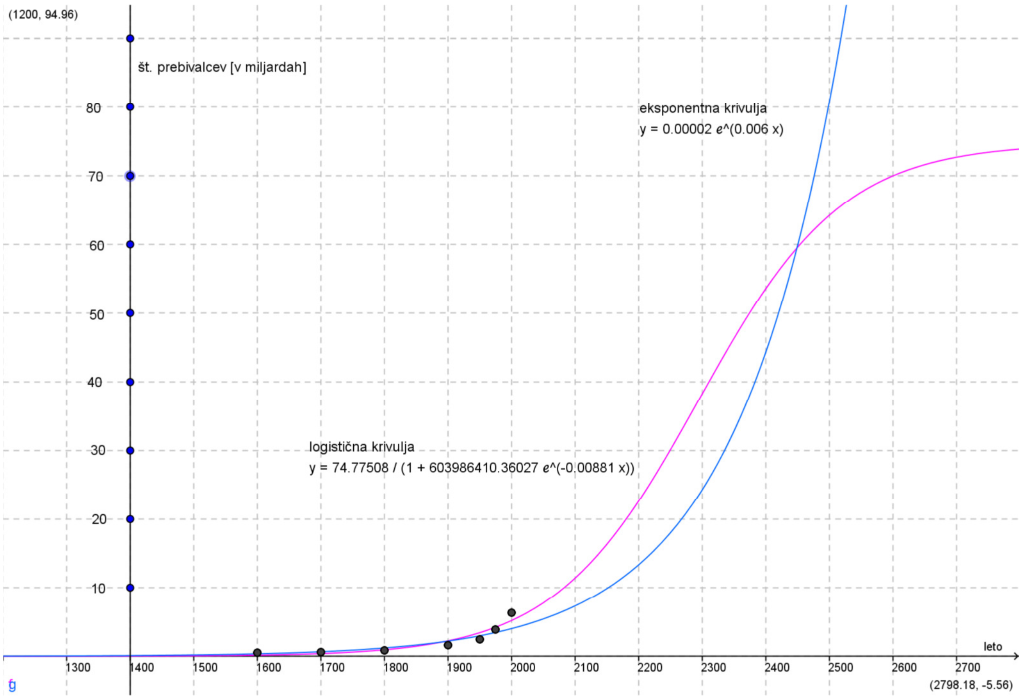
8. Število prebivalcev na Zemlji

a) Podatke modelira $f(x) = 2 \cdot 10^{-5} \cdot e^{0,006x}$

Rast prebivalstva.grf ,

Rast prebivalstva.xlsx

Modeliranje z logistično krivuljo:



b) Krivulja najprej narašča počasi, nato pa strmo.

c) Iz grafa eksponentne prilagoditvene krivulje je mogoče razbrati, da je bilo 0,2 milijardi prebivalcev na Zemlji leta 1500, medtem ko iz logistične krivulje razberemo, da je bilo leta 1500 na Zemlji 0,07 milijarde prebivalcev. Vir za primerjave: [http://en.wikipedia.org/wiki/World_population (1](http://en.wikipedia.org/wiki/World_population). 7. 20101).

d) Leta 2025 dobimo s programom Graph precej manjše število kot leta 2000. Če ocenimo na pamet, bo takrat verjetno okrog 10,2 milijarde prebivalcev. Z logistično krivuljo dobimo podatek 7,8 milijarde prebivalcev.

e) Iz podatkov v preglednici in z upoštevanjem razvoja skozi zgodovino lahko sklepamo, da je bilo prebivalcev leta 1500 manj kot leta 1600, in da bo leta 2025 število prebivalcev še naraslo (v preteklosti je prebivalstvo počasneje naraščalo kot bo v prihodnosti, kar je specifika eksponentne rasti).

f) Lažje je narediti oceno v preteklosti, ker poznamo okoliščine (vojne, socialne razmere, ideologijo …), za prihodnost pa lahko le predvidevamo, kaj vse bo vplivalo na rast.

9. Velikosti žebljev

Žeblji_podatki.xlsx

a) Dolžina žeblja v milimetrih je linearno odvisna od dolžine žeblja v inčih in obratno.
Zveza med obema dolžinskima enotama: *f(x)* = 25.41**x* + 0.16 (*x* je dolžina v inčih, *f(x)* je dolžina v mm) in *g(x)* = 0.039*x* - 0.006 (*x* je dolžina v mm, *g(x)* je dolžina v inčih).

žeblji_dol_dol_(X_inče).grf žeblji_dol_dol_(X_mm).grf

,

b) **Velikosti** žeblja je od njegove **dolžine** v milimetrih odvisna eksponentno. Obratna povezanost spremenljivk je logaritemska. Funkcijska predpisa: *f(x)* = 1.42*1.03^x in *g(x)* = 38.12*ln(*x*) – 12.17.

žeblji_eks_mm.grf žeblji_log_mm.grf

,

c) **Velikosti** žeblja je od njegove **dolžine** v inčih odvisna eksponentno. Obratna povezanost spremenljivk je logaritemska. Funkcijska predpisa: *f(x)* = 1.42*1.93^x in *g(x)* = 1.5*ln(*x*) – 0.48

žeblji_eks_inče.grf žeblji_log_inče.grf

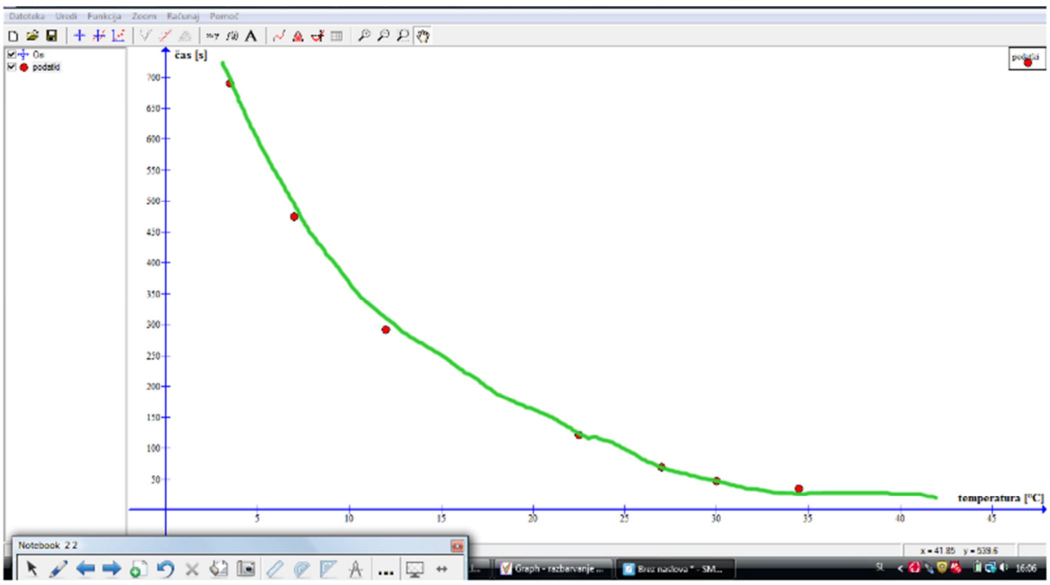
,

d) Kompozitum dobljenih funkcij je v vseh primerih *f(g(x)) = x*, saj so si funkcije paroma inverzne.

10. Razbarvanje raztopine

a) Višja kot je temperature, hitreje se raztopina razbarva.

b) Narišemo točke v koordinatni sistem in točke gladko povežemo.



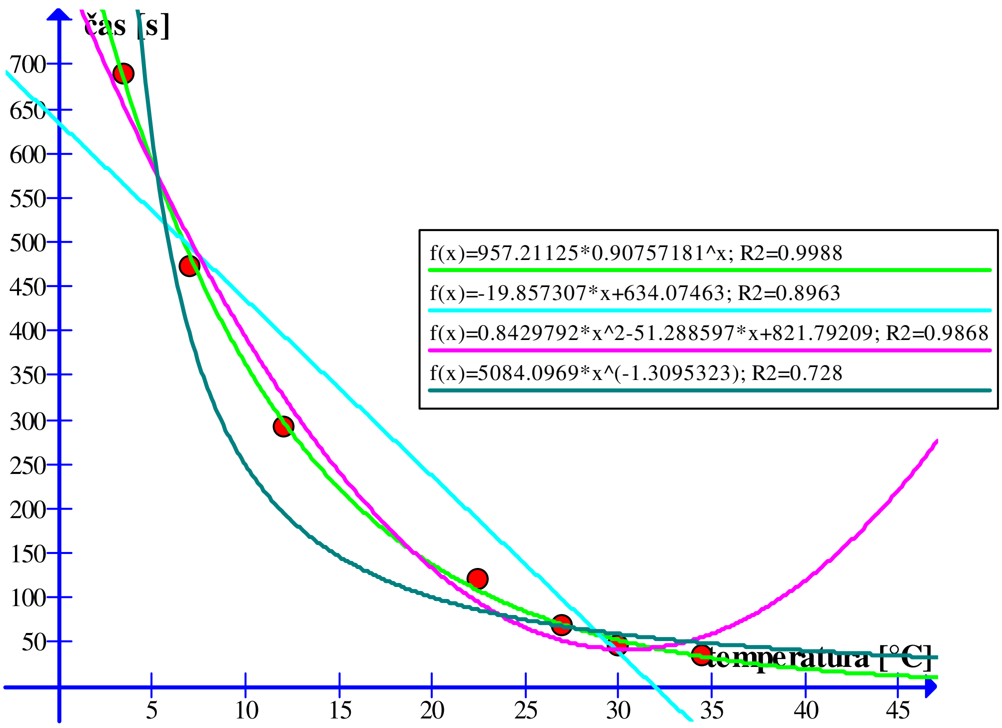
Slika je narejena na interaktivni tabli s programom Graph, točke so povezane ročno, s pisalom.

c) Izberemo dve točki, npr.: A(3.5, 690), B(7, 474).
Zapišemo sistem enačb: 690 = $a\,e^{3.5k}$ in 474 = $a\,e^{7k}$
Rešitev: a = 1004,43, k = – 0,107
Predpis: $t(T) = 1004{,}43\,e^{-0{,}107t}$

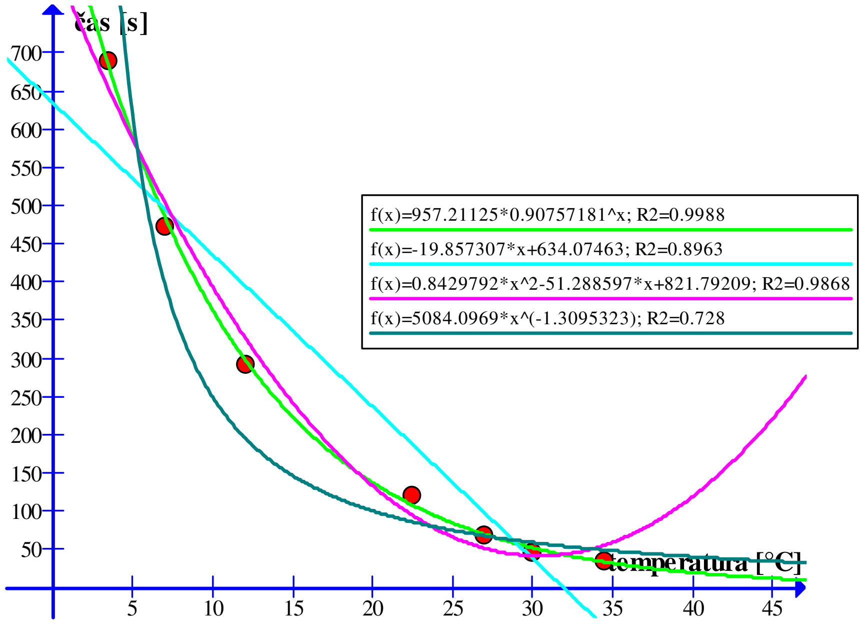
Z drugo izbiro parov točk dobimo različne predpise (nekaj primerov izbire točk med 42 možnimi izbirami):

Izbrani točki	**Predpis**
A(3.5, 690), B(7, 474)	$t(T) = 1004{,}43\,e^{-0{,}107t}$
A(3.5, 690), C(12, 292)	$t(T) = 983{,}17\,e^{-0{,}101t}$
B(7, 474), E(27, 69)	$t(T) = 930{,}47\,e^{-0{,}096t}$
D(22.5, 121), E(27, 69)	$t(T) = 2006{,}628\,e^{-0{,}1248t}$
D(22.5, 121), F(30, 47)	$t(T) = 2064{,}657\,e^{-0{,}1261t}$
B(7, 474), G(34.5, 35)	$t(T) = 920{,}132\,e^{-0{,}095t}$
D(22.5, 121), G(34.5, 35)	$t(T) = 1238{,}455\,e^{-0{,}1034t}$

Grafi:



Predpis za eksponentno prilagoditveno krivuljo:
$f(x) = 957{,}21 * 0{,}9076^x = 957{,}21\,e^{-0{,}09698x}$
Druge prilagoditvene krivulje niso dober model za dani primer.



d)

e) Pri temperaturi 40°C je čas razbarvanja 19,8s (po eksponentni prilagoditveni krivulji).
Po eksponentni funkciji, ki smo jih izračunali v točki c):

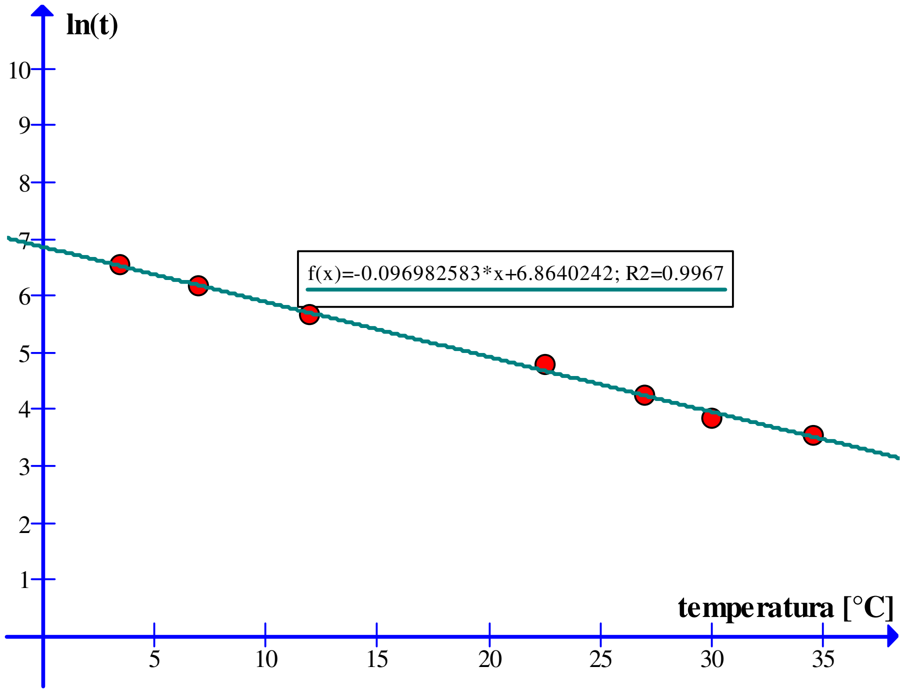
Izbrani točki	Predpis	*t* (merjen pri 40 °C)
A(3.5, 690), B(7, 474)	$t(T) = 1004{,}43\ e^{-0{,}107t}$	13,75
A(3.5, 690), C(12, 292)	$t(T) = 983{,}17\ e^{-0{,}101t}$	17,18
B(7, 474), E(27, 69)	$t(T) = 930{,}47\ e^{-0{,}096t}$	19,72
D(22.5, 121), E(27, 69)	$t(T) = 2006{,}628\ e^{-0{,}1248t}$	13,12
D(22.5, 121), F(30, 47)	$t(T) = 2064{,}657\ e^{-0{,}1261t}$	13,32
B(7, 474), G(34.5, 35)	$t(T) = 920{,}132\ e^{-0{,}095t}$	20,78
D(22.5, 121), G(34.5, 35)	$t(T) = 1238{,}455\ e^{-0{,}1034}$	19,82

f)

Temperatura *T*[°C]	Čas *t*[s]	*ln(t)*
3,5	690	6,536692
7,0	474	6,161207
12,0	292	5,676754
22,5	121	4,795791
27,0	69	4,234107
30,0	47	3,850148
34,5	35	3,555348

Najprimernejša prilagoditvena funkcija je linearna funkcija. Enačba premice:

$y = -0{,}09698x + 6{,}864$



g) Logaritmiramo z naravnim logaritmom funkcijo

$f(x) = 957{,}21 * 0{,}9076^x = 957{,}21\ e^{-0{,}09698x}$

$\ln f(x) = \ln\,(957{,}21\ e^{-0{,}09698x})$

$\ln f(x) = \ln 957{,}21 + \ln e^{-0{,}09698x}$

$\ln f(x) = 6{,}864 - 0{,}09698x$

$\ln f(x) = \ln t$, torej smo dobili enačbo premice iz točke f)

h) Za dane podatke je eksponentna prilagoditvena krivulja najprimernejša.

raztopina.xlsx

11. Cena smučarske vozovnice

I. Podražitev vozovnice označimo s spremenljivko *x.* Raziščimo dohodek na smučišču glede na prvi mogoč način. Vprašanja za spodbujanje reševanja:
   a) Kolikšna je nova cena vozovnice?
   b) Za koliko se zmanjša število smučarjev? Koliko je prodanih vozovnic?
   c) Kolikšen je novi dnevni dohodek na smučišču?
   d) Kolikšna je razlika med novim in starim dohodkom?
   e) Pri katerih vrednostih spremenljivke *x* je dnevni dohodek večji kot pred podražitvijo? Pomagaj si z matematičnim programom za risanje funkcij.
   f) Pri kateri podražitvi je dohodek največji?
   g) *Nalogo lahko rešiš z *N* prodanimi vozovnicami na dan in poljubnim koeficientom *k* podražitve.

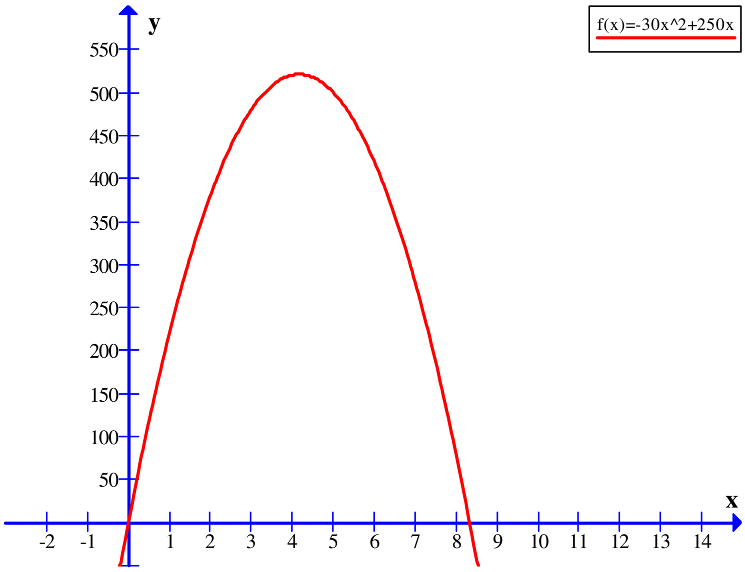
Rešitev:

Nova cena karte je 25 + x.

Novo število prodanih kart je 1000 – 30x.

Torej je razlika v dohodku $(25 + x)(1000 - 30x) - 25000 = -30x^2 + 250x$

Graf:



Ta razlika naj bi bila pozitivna, to pa je za $0 < x < 250/30 = 8\ 1/3$. Privzamemo, da je $x > 0$.

Torej se jim splača podražiti kvečjemu na 33 EUR.

Največji dohodek bodo imeli, če podražijo karto za 4,17 EUR, torej bi karta stala 29,17 EUR. V tem primeru bi bil dobiček večji za 520,83 EUR.

Lahko nalogo rešimo še splošno s poljubnim faktorjem k in začetnim številom prodanih kart N in vidimo, da je podražitev smiselna za $x < \frac{N}{k} - 25$.

II. Raziščimo dohodek na smučišču glede na drug mogoči način.

a) Kolikšna je nova cena vozovnice?
b) Kolikšno je novo število smučarjev, če se podraži vozovnica za 1 EUR?
c) Kolikšno je novo število smučarjev, če se podraži vozovnica za 2 EUR, 3 EUR … x EUR?
d) Kolikšen je novi dnevni dohodek na smučišču?
e) Kolikšna je razlika med novim in starim dohodkom?
f) Pri katerih vrednostih spremenljivke x je dnevni dohodek večji kot pred podražitvijo?
   Pomagaj si z matematičnim programom za risanje funkcij.
g) Pri kateri podražitvi je dohodek največji?

Rešitev:

Zanima nas za koliko lahko podražijo, zato podražitev vzamemo za neodvisno spremenljivko in jo označimo z ***x*** (EUR). Prvotni dohodek je 25000 EUR. Izračunajmo novi dohodek.

V tem primeru pa vsak evro podražitve pomeni padec števila smučarjev za p %.

Vzemimo, da je $p = 3$. Nova cena karte je $25 + x$. Novo število smučarjev S_1 pri podražitvi za 1 EUR je $S_1 = 1000 - 1000 * 3/100 = 1000 * 0.97$.

Če podražimo karto še za 1 EUR, torej skupaj za 2 EUR, je novo število smučarjev S_2 spet za 3 % manjše, kar pomeni, da je $S_2 = S_1 - S_1 * 3/100 = S_1 * 0{,}97 = 1000 * 0{,}97^2$.

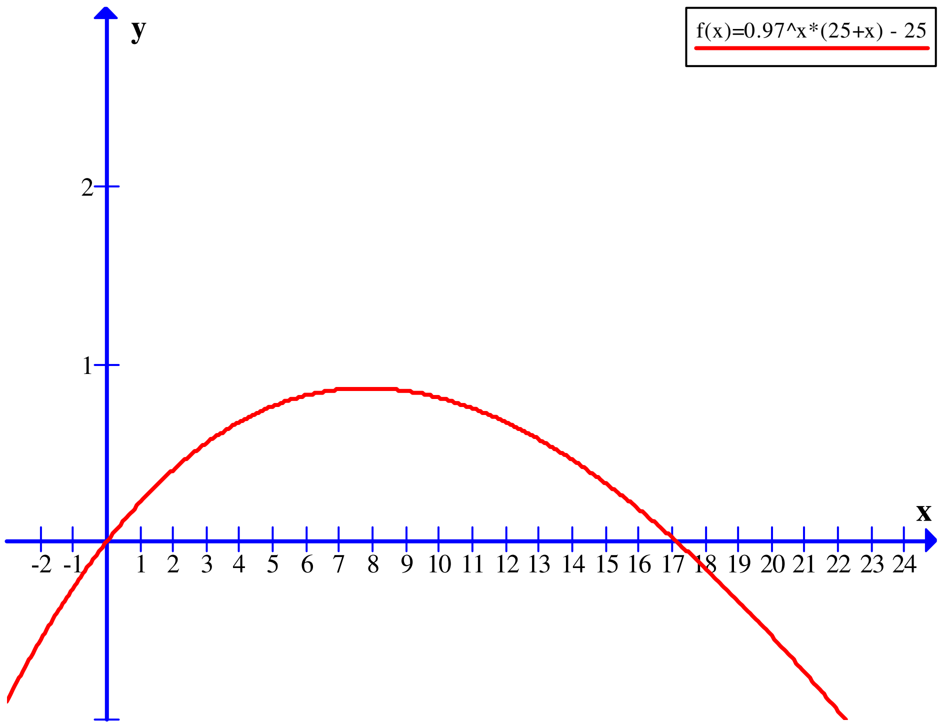
Vidimo, da če podražimo za x EUR, se število kupljenih kart zmanjša na $S_x = 1000 * 0.97^x$.

V tem modelu je razlika v dohodku $1000 * 0{,}97^x (25 + x) - 25000 = 1000(0.97^x (25 + x) - 25)$.

S podražitvijo moramo kaj pridobiti, zato mora biti ta razlika pozitivna, torej moramo rešiti neenačbo $0{,}97^x (25 + x) - 25 > 0$.

Neenačbo lahko rešimo le grafično, z uporabo ustreznega programa ali grafičnega kalkulatorja.

Na sliki je narisan graf funkcije $0.97^x (25 + x) - 25$. Vidimo, da je funkcija pozitivna za $0 < x < 17$.
Pri tem modelu lahko povečajo ceno karte na 42 EUR.



Največji prihodek bodo imeli, če podražijo karto za 7,83 EUR, torej bi karta stala 32,83 EUR. V tem primeru bi bil prihodek večji za 863,9 EUR.

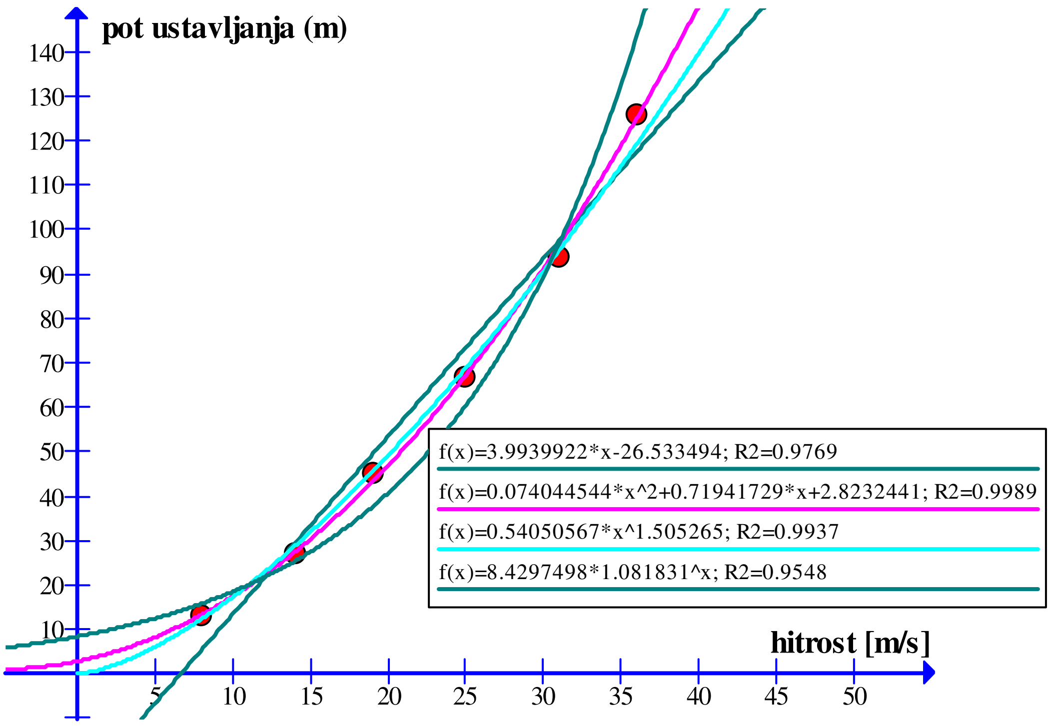
12. Promet: S kolikšno hitrostjo naj vozimo, da bo čim manj zastojev?

a) Pot ustavljanja je enaka vsoti reakcijske poti, ki jo naredimo preden reagiramo na oviro in poti, ki jo naredimo med zaviranjem-zavorne poti. Reakcijska pot je linearna funkcija hitrosti. Predvideva se, da je reakcijski čas povprečnega voznika približno 1 sekunda. Po eni sekundi začne voznik zavirati, zavorna pot pa je odvisna od hitrosti, stanja na cesti in še česa drugega. Podatki so za suho cesto.

Hitrost *v*[km/h]	Hitrost *v*[m/s]	Reakcijska pot [m]*	Zavorna pot [m]	Pot ustavljanja *s*[m]
30	8,33	8	5	13
50	13,89	14	13	27
70	19,44	19	26	45
90	25	25	42	67
110	30,56	31	63	94
130	36,11	36	90	126

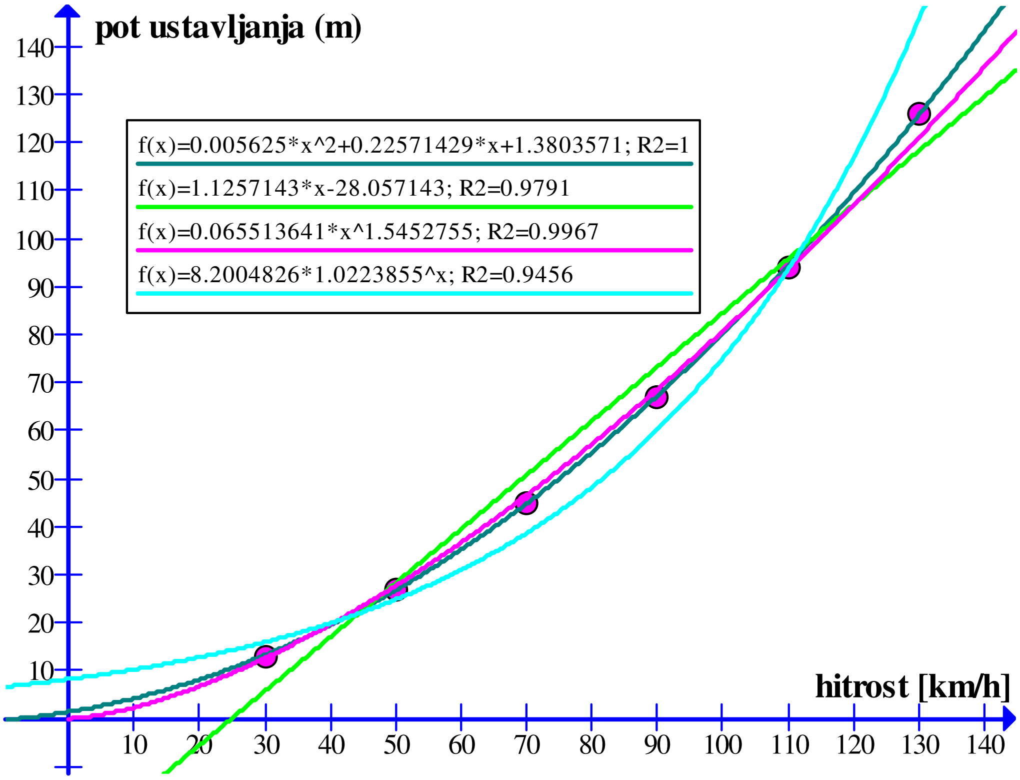
*zaokroženo na celi del

b) Hitrost naj bo podana v m/s.



Najprimernejša prilagoditvena funkcija je kvadratna funkcija s predpisom:
$f(x) = 0{,}074x^2 + 0{,}719x + 2{,}823$, kjer je x hitrost podana v m/s.

Hitrost je podana v km/h.



Najprimernejša prilagoditvena funkcija je kvadratna funkcija s predpisom:
$f(x)$ = 0,0056x^2 + 0,226x + 1,38, kjer je x hitrost podana v km/h.

c) Razdalja med začetkom prvega avtomobila in začetkom drugega je enaka vsoti poti ustavljanja in dolžine avta (4 m).

Hitrost v[km/h]	Hitrost v[m/s]	Pot ustavljanja s[m]	Razdalja med vozili [m]
30	8,33	13	17
50	13,89	27	31
70	19,44	45	49
90	25	67	71
110	30,56	94	98
130	36,11	126	130

d) Časovni interval med prihodom avtomobila do opazovališča do prihoda drugega avtomobila je $t = \frac{s}{v}$, kjer je s razdalja med vozili.

Hitrost v[km/h]	Hitrost v[m/s]	Pot ustavljanja s[m]	Razdalja med vozili [m]	Časovni interval [s]
30	8,33	13	17	2,04
50	13,89	27	31	2,23
70	19,44	45	49	2,52
90	25	67	71	2,84
110	30,56	94	98	3,21
130	36,11	126	130	3,6

e) Število avtomobilov, ki pelje mimo opazovališča v eni uri, ob predpostavki, da vozijo v koloni z priporočeno varnostno razdaljo med vozili.

Hitrost *v*[km/h]	Hitrost *v*[m/s]	Pot ustavljanja *s*[m]	Razdalja med vozili [m]	Časovni interval [s]	Število avtomobilov v 1 uri
30	8,33	13	17	2,04	1764
50	13,89	27	31	2,23	1614
70	19,44	45	49	2,52	1428
90	25	67	71	2,84	1267
110	30,56	94	98	3,21	1121
130	36,11	126	130	3,6	1000

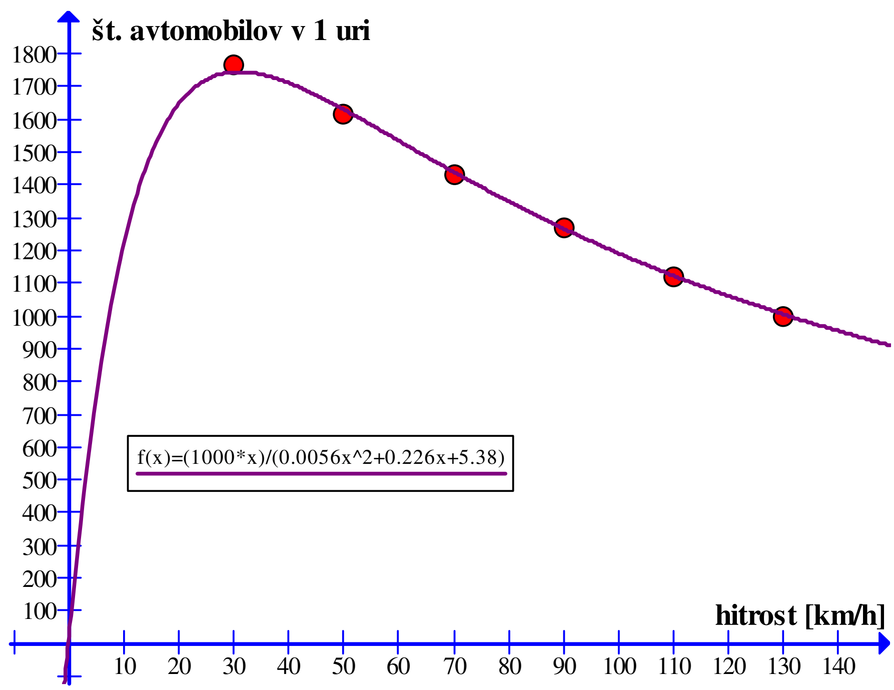
f) Po podatkih iz tabele predvidevamo, da je 30 km/h tista hitrost, pri kateri pelje mimo opazovališča največ avtomobilov.

Vzemimo, da je v povprečju avto dolg 4 m, torej je čas, ki mine od trenutka, ko gre mimo dane točke avto, pa do tega, da gre mimo nje naslednji avto, enaka $t = \frac{s}{v}$. Uporabimo zvezo med hitrostjo (km/h) in potjo ustavljanja (m) (glej primer b)):

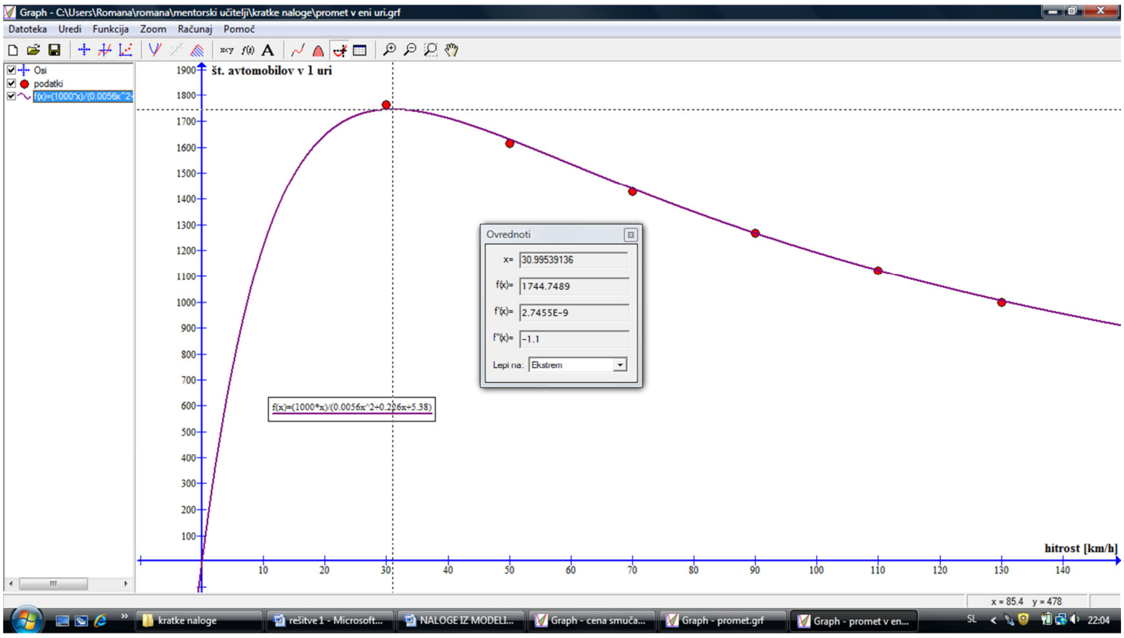
$$t = \frac{s}{v} = \frac{(0{,}0056v^2 + 0{,}226v + 1{,}38 + 4)}{v * 1000}$$

V eni uri se torej mimo naše točke prepelje (*š*(v) pomeni število avtomobilov v 1 uri)

$$š(v) = \frac{v * 1000}{(0{,}0056v^2 + 0{,}226v + 5{,}38)}$$



Določimo hitrost *v* tako, da bo število avtomobilov največje, torej iščemo maksimum te funkcije.



Funkcija ima ekstrem pri hitrosti v = 30,995 km/h.

Torej bi največ avtomobilov peljalo mimo opazovališča, če bi peljali s hitrostjo 31 km/h. Takrat bi jih ob predpostavki, da avtomobili vozijo v koloni z medsebojno razdaljo, ki je enaka poti ustavljanja pri dani hitrosti, peljalo mimo 1744 avtomobilov v 1 uri.

Prirejeno po članku Not another queue by Peter Hall, Mathematics in School, May 2009.

V učbeniku P. Legiša Matematika 4 (2005) je na str. 119 sorodna naloga:

Zavorna pot tovornjaka, ki vozi v km/h, znaša približno v^2/100 m, reakcijska pot pa recimo v/4 m. Ugotovi hitrost, pri kateri bo za kolono tovornjakov z medsebojno razdaljo enako vsoti zavorne in reakcijske poti prepustnost ceste največja. Tovornjaki naj bodo dolgi 16 m.

Hitrost v[km/h]	Reakcijska pot [m]	Zavorna pot [m]	Pot ustavljanja s[m]
30	7,5	9	16,5
50	12,5	25	37,5
60	15	36	51
70	17,5	49	66,5
80	20	64	84
100	25	100	125

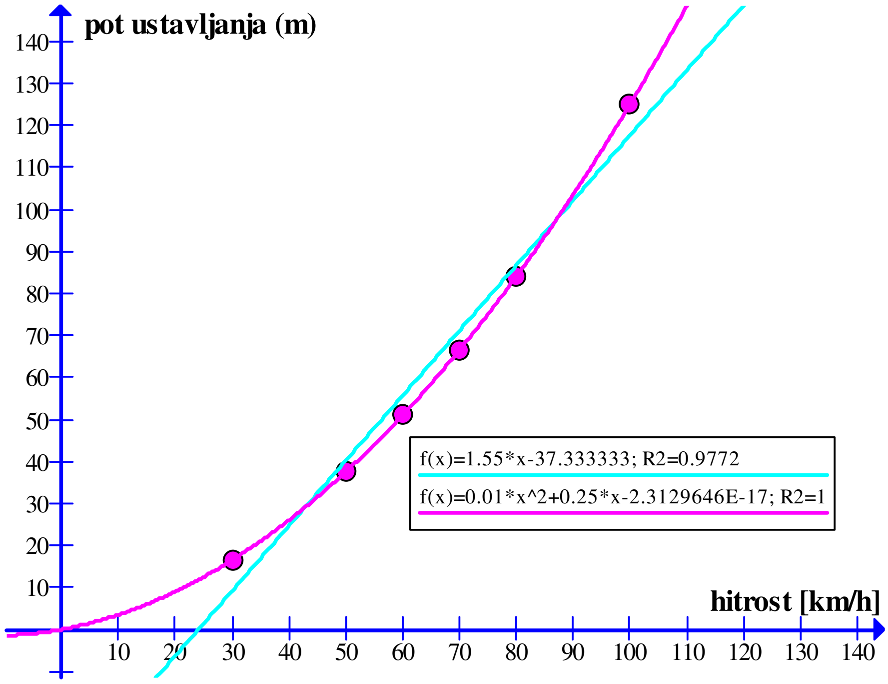
Najprimernejša prilagoditvena funkcija je kvadratna funkcija s predpisom:
$f(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}25x$, kjer je x hitrost podana v km/h.

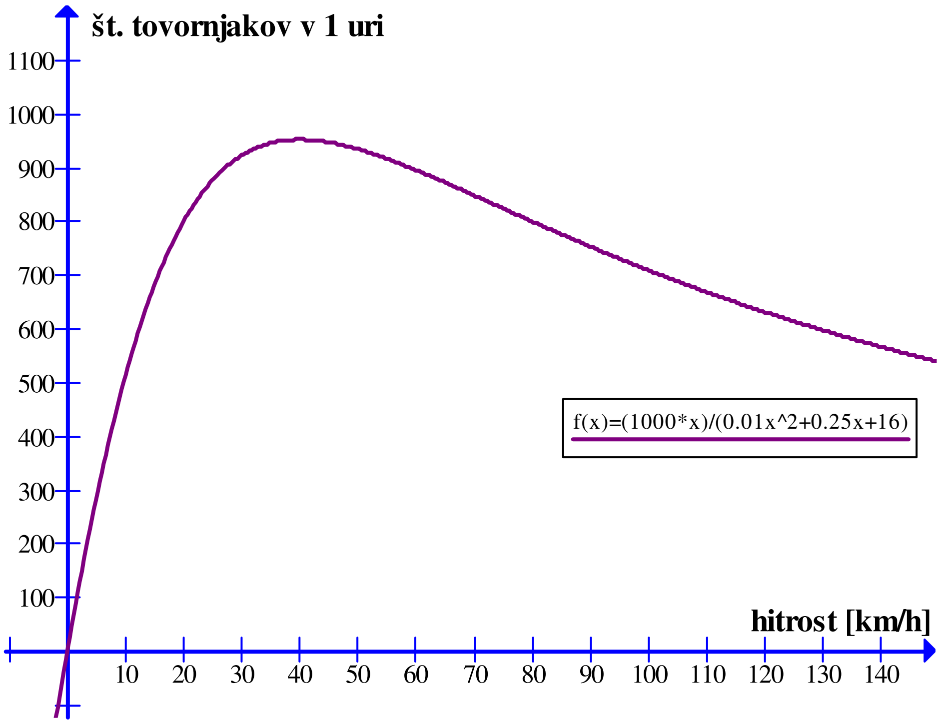
Vzemimo, da je v povprečju tovornjak dolg 16 m, torej je čas, ki mine od trenutka , ko gre mimo dane točke tovornjak, pa do tega, da gre mimo nje naslednji tovornjak, enaka $t = \frac{s}{v}$. Uporabimo zvezo med hitrostjo (km/h) in potjo ustavljanja (m) (glej primer b)):

$$t = \frac{s}{v} = \frac{(0{,}01v^2 + 0{,}25v + 16)}{v*1000}$$

V eni uri se torej mimo naše točke prepelje ($š(v)$ pomeni število tovornjakov v 1 uri)

$$š(v) = \frac{v*1000}{(0{,}01v^2 + 0{,}25v + 16)}$$





Funkcija ima ekstrem pri hitrosti v = 40 km/h.

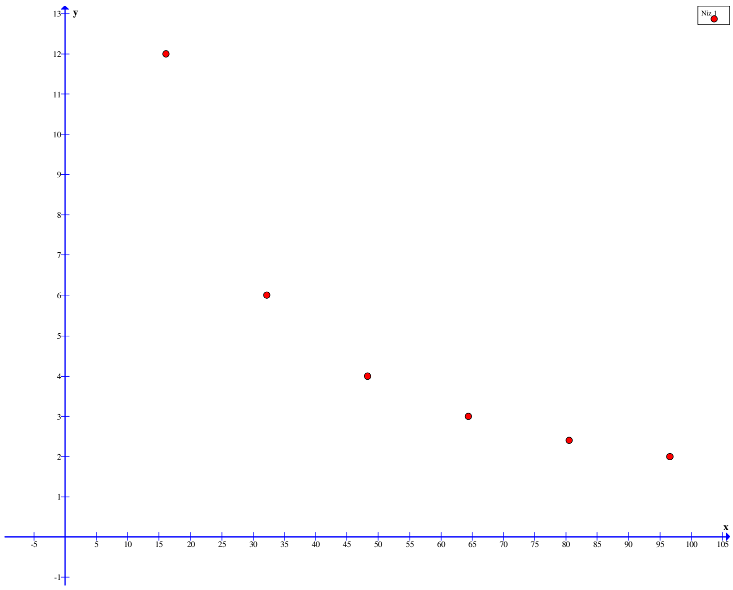
Torej bi največ tovornjakov peljalo mimo opazovališča, če bi peljali s hitrostjo 40 km/h.

Takrat bi jih ob predpostavki, da tovornjaki vozijo v koloni z medsebojno razdaljo, ki je enaka poti ustavljanja pri dani hitrosti, peljalo mimo 952 tovornjakov v 1 uri.

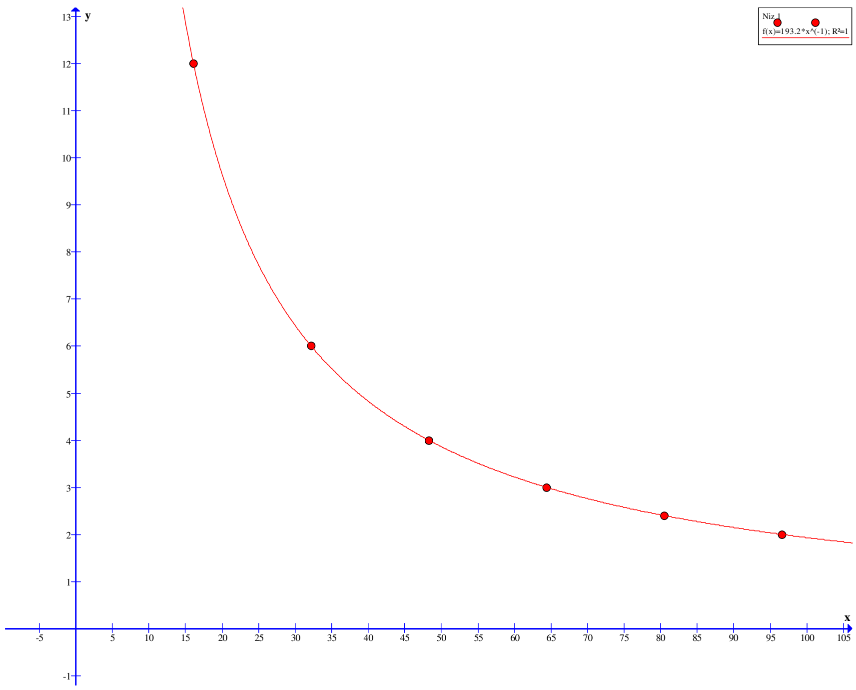
13. Čakalni čas pred zapornicami

a) Večja kot je hitrost vlaka, krajši je čas čakanja pred zapornicami. Čas čakanja pred zapornicami pada. Če povečujemo hitrost ves čas za isto vrednost ($16{\cdot}1\frac{km}{h}$), se čas čakanja najprej razpolovi, nato se zmanjša za tretjino, četrtino, petino, šestino … . To pomeni, da čas čakanja pred zapornicami pojema obratno sorazmerno s hitrostjo. Pričakujemo lahko, da je funkcija, po kateri izračunamo čas čakanja pred zapornicami v odvisnosti od hitrosti vlaka oblike $t(v) = a \cdot \frac{1}{v}$.

b) Čas čakanja vlaka pred zapornicami v odvisnosti od hitrosti vlaka je prikazan v spodnjem koordinatnem sistemu.



c) Najprimernejšo prilagoditveno funkcijo prikazuje spodnji graf.



Prilagoditvena funkcija je dobljena s programom Graph. Njen predpis je $t(v) = 193{,}2 \cdot v^{-1}$. Krivuljo, ki je graf iskane funkcije, imenujemo hiperbola.

Če narišemo točke v koordinatni sistem, ugotovimo, da bo potenčna funkcija najprimernejša in lahko njen predpis izračunamo tudi brez uporabe tehnologije.

d) Čas čakanja je odvisen verjetno tudi od tega kakšne so zapornice ali avtomatske ali jih spuščajo ročno.

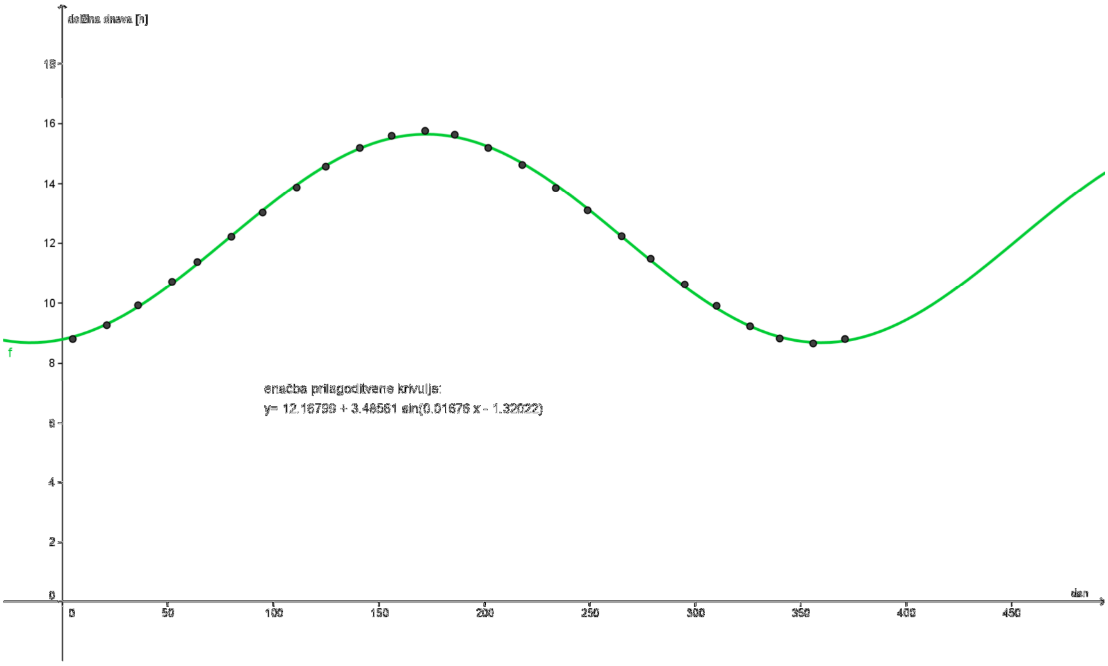
14. Dolžina dneva

Naloga je rešena v priročniku na str. 104.

a) Dolžine dneva se periodično krajšajo in daljšajo.

b)

Datum	Dan v letu 2010	Dolžina dneva v urah:min	Dolžina dneva v urah
5. januar	5	8:48	8,80
21. januar	21	9:16	9,27
5. februar	36	9:55	9,92
21. februar	52	10:43	10,72
5. marec	64	11:22	11,37
21. marec	80	12:13	12,22
5. april	95	13:02	13,03
21. april	111	13:52	13,87
5. maj	125	14:34	14,57
21. maj	141	15:12	15,20
5. junij	156	14:36	15,60
21. junij	172	15:46	15,77
5. julij	186	15:38	15,63
21. julij	202	15:12	15,20
5. avgust	218	14:37	14,62
21. avgust	234	13:51	13,85
5. september	249	13:06	13,10
21. september	265	12:14	12,23
5. oktober	279	11:29	11,48
21. oktober	295	10:38	10,63
5. november	310	9:54	9,90
21. november	326	9:13	9,22
5. december	340	8:49	8,82
21. december	356	8:39	8,65
5. januar 2011	371	8:48	8,80



c) Enačba prilagoditvene krivulje je: $y = 12{,}168 + 3{,}486 \sin(0{,}017x - 1{,}32)$.
   y pomeni dolžino dneva v urah
   x pomeni dan v letu (1 dan je 1.1.2010)
   12,168 pomeni povprečno dolžino dneva
   2*3,486 = 6,972 pomeni razliko (v urah) med najkrajšim in najdaljšim dnevom
   $\frac{2\pi}{0{,}017} = 369{,}6$ (to je približno 1 leto) nam pove osnovno periodo ponavljanja dolžine dneva
   $\frac{1{,}32}{0{,}017} = 77{,}65$ (približno 68 dan) dolžina tega dne je enaka povprečni dolžini dneva

d) Rojstni dan: npr. 18.6.
   To je 169. dan; dolžina dneva 15,65 ure.

e) Dolžina dneva 200 dni po 1. septembru , to je 245 + 200 = 445 dan (to je 20. Marec naslednje leto oz. 79. dan v novem letu); Dolžina dneva je 11,66 ure (če bi gledali pa 79. dan, bi bila dolžina dneva 12,18 ure – razlika nastopi zaradi periode, ki je malo več kot eno leto).

f) Zaloga vrednosti dobljene funkcije je $Z_f = [8.6, 15.7]$.

g) Funkcija zavzame maksimalno vrednost (dolžina dneva 15.7 ure) v 173. dnevu (22. junija) in minimalno vrednost (dolžina dneva 8.6 ure) v 360. dnevu (25. december).

Opomba: Večino slik se z dvoklikom nanje odpre v programu Graph.